No. 1 Date 29/11/2019

Τελευταίο μάθημα (τα κάναμε)

(1) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} 0, & y<0 \vee y\geq x^2 \\ 1, & 0<y<x^2 \end{cases}$

(2) Η f είναι συνεχής κατά μήκος κάθε ευθείας που περνάει από το $(0,0)$, δηλ. οι $g_m(x) = f(x, ax)$, $a\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχείς, καθώς και η $g_\infty(y) = f(0,y)$, $y\in\mathbb{R}$

(3) Όμως η f δεν είναι συνεχής, αφού αν επιλέξουμε $(x_\nu,y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\nu^2}\right) \to (0,0)$, αλλά $f(x_\nu,y_\nu) = 1 \to \neq 0 \quad f(0,0)$

Κάποια χρήσιμα αποτελέσματα για όρια και συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων:

[1] Αν το $\bar{x}_0 \in U$ είναι σημ. συσσ., τότε η $f: U \to \mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$

$\underbrace{f \text{ συνεχής στο } \bar{x}_0}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\lim_{x\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)}_{\forall(\bar{x}_\nu)\subset U\setminus\{\bar{x}_0\} \text{ με } \bar{x}_\nu\to\bar{x}_0,\ f(\bar{x}_\nu)\to f(\bar{x}_0)}$

$\Leftrightarrow \forall(\bar{x}_\nu)\in U$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$
$f(\bar{x}_\nu)\to f(\bar{x}_0)$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\bar{x}\in U\cap B(\bar{x}_0,\delta) \quad |f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$

[2] Ισχύει το πάρα πολύ πρακτικό θεώρημα (βλ. το αντίστοιχο για όρια συναρτήσεων)

Θεώρημα:
Έστω $f,g: U\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $\bar{x}_0\in U$ και οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\bar{x}_0$.
$f+g$, af ($a\in\mathbb{R}$), fg, f/g, αν $g(\bar{x}_0)\neq 0$
$h\circ f$ για $h: V\to\mathbb{R}$, $f(U)\subset V\subset\mathbb{R}$, συνεχής στο $f(\bar{x}_0)$

$\forall(\bar{x}_\nu)\subset U$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$: $f(\bar{x}_\nu)\to f(\bar{x}_0) \xrightarrow[\text{στο } f(\bar{x}_0)]{h \text{ συνεχής}} (h\circ f)(\bar{x}_\nu) \to (h\circ f)(\bar{x}_0)$

3 Εφαρμογή του θεωρήματος

Οι πιο απλές συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται στον $\mathbb{R}^n$ και έχουν πραγματικές τιμές είναι οι προβολές στους άξονες.

$\bar{x}\in\mathbb{R}^n \to x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \longrightarrow x_i \ (\forall i=1,\dots,n)$ είναι συνεχής.

(ισχύει το π.ο. απλ. σ' όλο του $\mathbb{R}^n$)

αφού $\forall (\bar{x}_\nu)\subset\mathbb{R}^n$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$: $x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$

$\left(x_0^{(1)},\dots,x_0^{(n)}\right)$ $\forall i=1,2,\dots,n$

$\Rightarrow$ όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς

$\Rightarrow$ όλες οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς (όπου ορίζεται ο παρονομαστής)

Άσκηση 23 Δ.Α

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(i) Η f είναι συνεχής σε κάθε $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ αφού το $\mathbb{R}^n\setminus\{(0,0)\}$ είναι ανοιχτό και η $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ είναι ρητή, γνωρίζουμε από την θεωρία ότι είναι συνεχής.

Τι γίνεται στο $(0,0)$;

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)=0$, άρα συνεχής στο $(0,0)$

Ισχύει ότι $\dfrac{|x_\nu|\cdot y_\nu^2}{\underbrace{x_\nu^2+y_\nu^2}} \leq \dfrac{|x_\nu|(x_\nu^2+y_\nu^2)}{x_\nu^2+y_\nu^2} \leq |x_\nu| \to 0$

Επιχειρήματα

ή $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \Leftrightarrow x_\nu \to 0$ κ' $y_\nu \to 0$

ή $|x_\nu| \leq \underbrace{\sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2}}_{\downarrow} \Leftrightarrow |x_\nu| \to 0$

και $|y_\nu| \to 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\|(x_\nu, y_\nu)\|} \to 0$

$\Leftrightarrow (x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$

Όρια και συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων (για $m=1$ έχουμε την περίπτωση πραγματικών συναρτήσεων)

Ορισμός:

Η $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ σ.σ.

τότε λέμε ότι η f έχει όριο το $l \in \mathbb{R}^n$ στο $\bar{x}_0$

$\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $f(\bar{x}_\nu) \to l \in \mathbb{R}$

$$f(\bar{x}_\nu) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_\nu) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}_\nu) \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}$$

Το όριο, αν υπάρχει, είναι μοναδικό [Πρόταση, άσκηση] και συμβολίζεται με $\lim\limits_{x \to x_0} f(\bar{x}) (= l) \in \mathbb{R}^m$

Από τους ορισμούς πραγμ. κ' διανυσμ. συνάρτησης και μια ιδιότητα σύγκλισης ακολουθιών στον $\mathbb{R}^k$, προκύπτει

$$\lim_{x \to x_0} f(\bar{x}) = \bar{l} \overset{\text{WOW}}{\Leftrightarrow} \forall j = 1, \dots, n, \ \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_j(\bar{x}) = l_j$$

Ορισμός:

Η $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$.

Αν $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, τότε f συνεχής στο $\bar{x}_0 \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, m$ f_j συνεχής στο $\bar{x}_0$.

Δείχνουν αντίστοιχες ιδιότητες όπως για τις πραγματικές βλ. (SOS)
[Άσκηση] "άλγεβρα ορίων" και "κριτήριο Cauchy"
Θεωρήματα 23.1 και 23.2 σημειώσεις

Super-SOS:

Συνεχής εικόνα συμπαγούς είναι συμπαγής

Θεώρημα: $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$: συνεχής και $U \subseteq \mathbb{R}^n$: συμπαγές
$\Rightarrow \bar{f}(U)$ είναι συμπαγές

Απόδειξη:

Χρήση Πρότασης 148 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Rightarrow \forall (x_\nu) \subseteq U$
$\exists (x_{k_\nu})$ και $\bar{x} \in U$, $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$ ως εξής:
Έστω $(\bar{y}_\nu) \subseteq \bar{f}(U) \Rightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subseteq U$ με $\bar{f}(\bar{x}_\nu) = \bar{y}_\nu$
$\underset{U\text{-συμπαγής}}{\Rightarrow} \exists (\bar{x}_{k_\nu})$ και $\bar{x} \in U$ $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \underset{f \text{ συνεχής}}{\to} \underbrace{\bar{f}(x_{k_\nu})}_{= y_{k_\nu}} \to \bar{f}(\bar{x})$

Ειδικότερα, για $\boxed{m=1}$ ισχύει (SUPER-SOS)^2

Θεώρημα:
Έστω $f: U \to \mathbb{R} \,(= \mathbb{R}^m$ με $m=1)$ συνεχής και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές.
Τότε το $f(U)$ είναι συμπαγές και η f λαμβάνει max κ' min στο U,
δηλ. $\exists \bar{x}_{min}, \bar{x}_{max} \in U$: $\min f = f(\bar{x}_{min}) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_{max}) = \max f$
όπου $\max f := \max f(U) = \max\{ f(\bar{x}) \in \mathbb{R} : \bar{x} \in U \}$
-//- $\min f := \max f(U) = \max\{ f(\bar{x}) \in \mathbb{R} : \bar{x} \in U \}$

Απόδειξη για το min:

$f(U) \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές $\Rightarrow \exists \inf f = \inf f(U) = \inf\{ f(\bar{x}) : \bar{x} \in U \} \in \mathbb{R}$
δηλ. $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $\exists \bar{x}_\nu \in U$: $f(\bar{x}_\nu) \in [\inf f, \inf f + \frac{1}{\nu})$
$\Rightarrow \underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{\in f(U)} \to \inf f$. Αφού όμως $f(U)$ είναι κλειστό
ισχύει $\inf f \in f(U) \Rightarrow \exists \bar{x}_{min} \in U$
$f(\bar{x}_{min}) = \inf f = \min f$.